

Verteilte Betriebssysteme

9. Kapitel

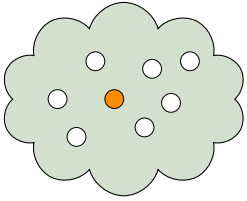
Auswahl

Matthias Werner

Professur Betriebssysteme

9.1 Einführung

- Viele verteilte Algorithmen und Anwendungen laufen nicht vollständig symmetrisch ab, sondern benötigen einen herausgehobenen Teilnehmer
- **Beispiele**:
  - Initiale Festlegung eines Tokenhalters (z.B. ABCAST ➡ Kapitel 5)
  - Wahl eines Koordinators für zentralisierten Algorithmus (z.B. gegenseitiger Ausschluss ➡ Kapitel 8
  - ...



- Ist dieser besondere Teilnehmer nicht *a priori* bestimmt[1], muss er zur Laufzeit bestimmt werden
- Algorithmen, die dies leisten werden **Auswahlalgorithmen** (leader election algorithmen) genannt

[1] ...was dann einen *single point of failure* darstellt

Problem

Auswahl

1. Es soll jeder irgendwann jeder Knoten wissen, ob er ausgewählt ist oder nicht
2. Es soll nur ein Knoten ausgewählt sein

- Etwas formaler:
  - Jeder Knoten ist in einem von drei Zuständen: *unentschieden*, *ausgewählt* oder *nicht ausgewählt*
  - Jeder Knoten startet im Zustand *unentschieden*
  - Jeder Knoten geht genau einmal in einen anderen Zustand (*ausgewählt* oder *nicht ausgewählt*) (finaler Zustand)

Problemvarianten

- Je nach Variante ist die Lösung des Auswahlproblems **trivial** bis **unmöglich**
- Z.B.:
  - Ein Algorithmus mit bekannten Identitäten im vollvermaschten System ist trivial
  - Im anonymen Ring ist ein deterministischer Algorithmus unmöglich
- Wir betrachten verschiedene Varianten

Problemvarianten (Forts.)

- **Identität**: Haben die Knoten wohlunterschiedene Identitäten?
  - Ja ➡ **MAX-Algorithmen**
  - Nein ➡ **anonyme Algorithmen**
- **Anzahl** der Teilnehmer?
  - Unbekannt
  - Bekannt
- **Determinismus** des Algorithms
  - **Deterministische** Algorithmen
  - **Randomisierte** Algorithmen
- Sonstiges:
  - **Synchronisation** (z.B. FIFO-Kanäle, beschränkte Kommunikationszeiten, ...)
  - **Topologie** (z.B. irregulär, vollvermascht, Ring, Baum, Torus, ...)

9.2 MAX-Algorithmen

- MAX-Algorithmen sind (im Gegensatz zu anonymen Algorithmen) immer einfach
- Grundidee:

Jeder nennt allen seine ID, die größte ID gewinnt.

- Deshalb konzentrieren wir uns auf die **Effektivität**
  - Anzahl der Nachrichten?
  - Zeitkomplexität?

Auswahlalgorithmus für beliebige Topologien

```
I_p: M_p == 0
   M_p := p;
   SEND M_p TO all neighbours;

R_p: {a message <j> arrived}
   IF M_p < j THEN
      M_p := j;
      SEND M_p TO all neighbours;
   FI


T_p: {termination was discovered}
   IF M_p == p THEN
      { I am the master }
   ELSE
      { M_p is the master }
   FI
```

- Jeder Prozess hat eine eindeutige Identität p und eine lokale Variable M_p, die initial 0 ist
- I_p wird von den Initiatoren ausgeführt
- Nachdem R_p ausgeführt wurde, kann p nicht mehr Initiator werden ➡ p kann dann auch nicht mehr gewinnen

➡ der höchste Initiator gewinnt

Auswahlalgorithmus für beliebige Topologien

```
I_p: M_p == 0
   M_p := p;
   SEND M_p TO all neighbours;

R_p: {a message <j> arrived}
   IF M_p < j THEN
      M_p := j;
      SEND M_p TO all neighbours;
   FI

T_p: {termination was discovered}
   IF M_p == p THEN
      { I am the master }
   ELSE
      { M_p is the master }
   FI
```

Aber wie?

- Jeder Prozess hat eine eindeutige Identität p und eine lokale Variable M_p, die initial 0 ist
- I_p wird von den Initiatoren ausgeführt
- Nachdem R_p ausgeführt wurde, kann p nicht mehr Initiator werden ➡ p kann dann auch nicht mehr gewinnen

➡ der höchste Initiator gewinnt

Auswahlalgorithmus für beliebige Topologien (Forts.)

- **Problem**: Feststellung der Terminierung
  - Terminierung ist nichttrivial
  - Algorithmen zur Terminierungsfeststellung (➡ späteres Kapitel) können genutzt werden
  - Auslösung nach „Verdacht“ ➡ Timeout

- **Komplexität**
  - Über jede Kante geht für jeden Initiator höchstens eine Nachricht
  - Schlechtester Fall: maximale Anzahl von Kanten und Initiatoren
  - Bei n Knoten: $\mathcal{O}(n^3)$
  - Aufwand für Terminierungserkennung kommt noch hinzu

Echo-Auswahlalgorithmus

- Nutzung des **Echo-Algorithmus** zur Auswahl (➡ Kapitel 8)
  - Funktioniert mit beliebigen, zusammenhängenden Topologien
  - Jeder Initiator startet eine Instanz des Echo-Algorithmus
  - Explorer und Echos führen die **Identität** des Initiators mit
  - Schwächere Nachrichten (Explorer und Echos) werden **nicht** weitergegeben sondern verschluckt ➡ **Nachrichtenauslöschung**

Echo-Auswahlalgorithmus (Forts.)

- Stärkste Welle setzt sich durch und **terminiert beim Gewinner**
  - Gewinner weiß, dass er gewonnen hat
  - Empfängt ein Initiator einen stärkeren Explorer, dann weiß er, dass er verloren hat

- Wie erfahren die **Verlierer** von der Terminierung?
  - Alle anderen Wellen stagnieren irgendwo endgültig
  - Zumindest der stärkste Initiator sendet kein Echo für die schwächeren Wellen
  - Bei **keinem** anderen Initiator terminiert sein Echo-Algorithmus
  - Wenn dies nicht ausreicht, muss der Gewinner die anderen in einer **weiteren** Welle informieren

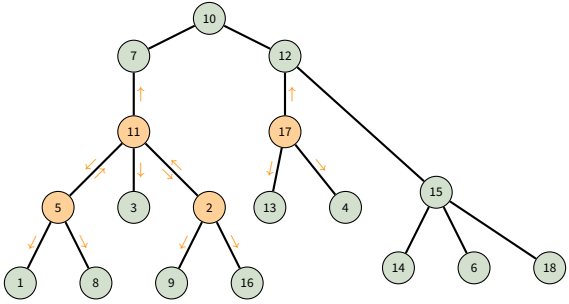
- **Komplexität** ist im schlechtesten Fall wieder $\mathcal{O}(n^3)$ Nachrichten (besser, wenn bereits Spannbaum besteht)

Modifizierter Echo-Algorithmus bei Baum-Topologie

- Nutzen Baum-Topologie für Wellen-Algorithmus
- Drei Phasen
  - **Explosionsphase**
    Wahlaufforderung wird zu den Blättern propagiert
  - **Kontraktionsphase**
    Von den Blättern wird das Maximum der bisher eingesammelten Identitäten zum Zentrum propagiert
  - **Informationsphase**
    Verbreitung des echten Maximums vom Zentrum aus an alle Knoten im Netzwerk

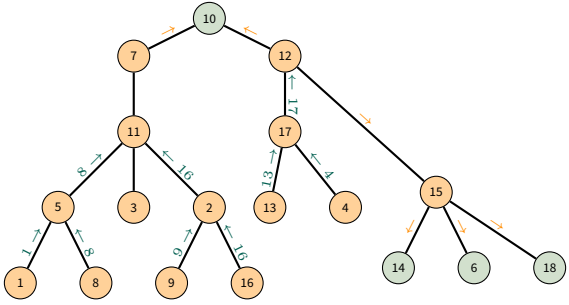
Explosionsphase

- Die Explosion startet bei mehreren Knoten (Initiatoren)
- Beim erstmaligen Erhalt einer Explosionsnachricht wird diese an alle anderen Nachbarn weitergegeben
- Die Explosionswellen vereinigen sich dort, wo sich Explosionsnachrichten auf einer Kante begegnen



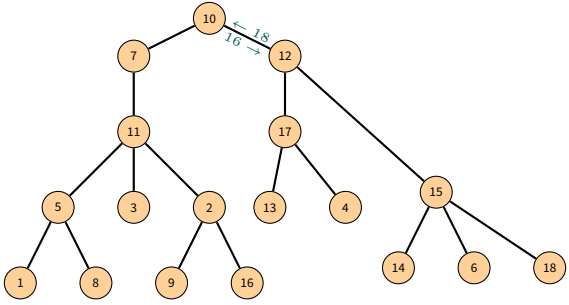
Kontraktionsphase

- Blätter antworten auf eine Explosionsnachricht sofort mit ihrer eigenen Identität
- Alle anderen Knoten senden über die letzte verbliebene Kante das Maximum aus den über die anderen Kanten erhaltenen Identitäten und ihrer eigenen Identität



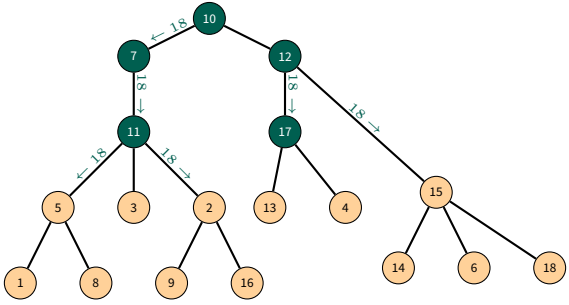
Ende der Kontraktionsphase

- Auf **genau einer** Kante begegnen sich zwei Kontraktionsnachrichten mit **unterschiedlichen** Maxima
- Beide empfangenden Knoten kennen danach das echte Maximum



Informationsphase

- Von beiden Knoten aus, wird das Maximum ins Netzwerk geflutet, wobei die Kante zwischen ihnen ausgespart wird



Nachrichtenkomplexität

- Explosionsphase: $(n-1)+(k-1)=n-2+k$
  - Eine Nachricht über jede Kante
  - Ausnahmen: 2 Nachrichten über die $k-1$ Begegnungskanten
- Kontraktionsphase: $(n-1)+1=n$
  - Eine Nachricht über jede Kante
  - Ausnahme: Zwei Nachrichten über die Zentrumskante
- Informationsphase: $(n-1)-1=n-2$
  - Eine Nachricht über jede Kante
  - Ausnahme: Keine Nachricht über die Zentrumskante
- Insgesamt $3n+k-4$ Nachrichten (➡ $\mathcal{O}(n)$)

9.3 Auswahl in anonymen Netze

- In anonymen Netzen haben Knoten **keine** dauerhaften **eindeutigen** Identitäten
- Lässt sich dann noch ein eindeutiger Gewinner der Auswahl bestimmen?
  - Mit deterministischen Algorithmen: nein
    (solange nicht eine bekannte Topologie eine indirekte Unterscheidung gibt)
  - Mit randomisierten Algorithmen: vielleicht

Unmöglichkeit anonymer determinsitischer Algorithmen

- Betrachten vollständig symmetrische Topologie:
  - anonymer Ring (Ringgröße darf bekannt sein)
  - synchrone Kommunikation
- **Annahme**: Es gibt einen **deterministischen** Algorithmus $\mathcal{A}$, der das Auswahlproblem löst
- **Beweis durch Widerspruch:**
  - Da alle Teilnehmer identisch sind, starten alle Teilnehmer von $\mathcal{A}$ im gleichen Zustand
  - In jeder Runde von $\mathcal{A}$ führen alle Teilnehmer die gleichen Schritte aus ➡ sind im gleichen Zustand
  - Wenn jemand sich zum Sieger erklärt, erklären sich alle zum Sieger ➡ Widerspruch
- **Lösung**: probabilistische Algorithmen

Unterscheidung randomisierter Algorithmen

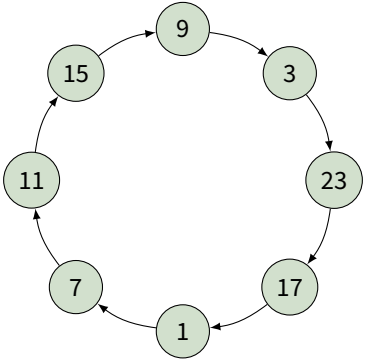
- **Las-Vegas-Algorithmen**
  - Liefern **immer** ein korrektes Ergebnis
  - Gegebenenfalls ist aber die worst-case Zeitkomplexität **unbeschränkt** ➡ Abschwächung der **Terminierungsforderung**
- **Monte-Carlo-Algorithmen**
  - Dürfen mit beschränkter Wahrscheinlichkeit ein **inkorrektes** Ergebnis liefern
  - Worst-case Laufzeit ist beschränkt
- Wir betrachten hier Las-Vegas-Algorithmen für das Auswahlproblem

Las Vegas-Auswahl für anonyme Ringe

- Es gibt aber selbst für eine symmetrische Topologie wie einen Ring Algorithmen
- Betrachten Algorithmus von ITAI und RODEH ➡ basiert auf MAX-Algorithmus von CHANG und ROBERTS
- Betrachen deshalb zuerst CHANG und ROBERTS:
  - Topologie: Ring mit Größe n
  - Jeder Knoten hat eindeutige UID
  - Kommunikation erfolgt stets in nur einer Richtung, z.B. im Uhrzeigersinn

Exkurs: Chang/Roberts

- Jeder Knoten ist in einem der drei Zustände: $Z \in \{\text{Nichtteilnehmer}, \text{Teilnehmer}, \text{Sieger}\}$
  - Am Anfang ist jeder Knoten Nichtteilnehmer

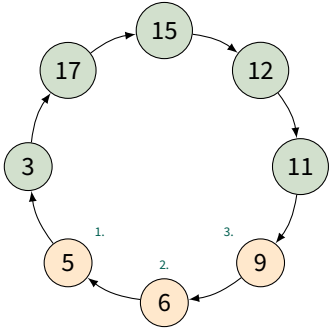


Exkurs: Chang/Roberts – Algorithmus

- Ein (oder mehrere) Knoten bemerk(t/en) das Fehlen eines Koordinators (Timeout), erklär(t/en) sich zum Teilnehmer, und verschick(t/en) eine Wahlnachricht mit seiner/ihrer UID
- Beim Empfang einer Wahlnachricht reagiert ein Knoten wie folgt:
  - Ist die UID in der Nachricht größer als die eigene, wird man Teilnehmer (falls man es noch nicht ist) und die Nachricht **weitergeleitet**
  - Ist die UID in der Nachricht kleiner als die eigene und man ist noch nicht Teilnehmer, wird man Teilnehmer und die UID in der Nachricht durch die eigene **UID ersetzt** und die Nachricht **weitergeleitet**
  - Ist die UID in der Nachricht kleiner als die eigene und man ist bereits Teilnehmer, wird die Nachricht **ignoriert**
  - Ist die UID in der Nachricht gleich der eigenen, **erklärt** man sich zum Sieger
- Ein Sieger sendet eine Sieger-Nachricht mit seiner UID, die von allen weitergeleitet wird
  - Wenn der Sieger seine eigene Nachricht empfängt, terminiert der Algorithmus

Exkurs: Chang/Roberts – Worst-case Nachrichten-komplexität

- **Annahme**: k Initiatoren
- Worst case tritt ein, wenn die Initiatoren in absteigender Reihenfolge auf dem Ring angeordnet sind und in aufsteigender Reihenfolge die Auswahl initiieren
  - k-größter Initiator
    ➡ $n - (k - 1)$ Nachrichten
  - ...
  - 3.-größter Initiator
    ➡ $n - 2$ Nachrichten
  - 2.-größter Initiator
    ➡ $n - 1$ Nachrichten
  - größter Initiator
    ➡ n Nachrichten



Exkurs: Chang/Roberts – Worst-case Nachrichtenkomplexität (Forts.)

- Nachrichtenkomplexität bei k Initiatoren

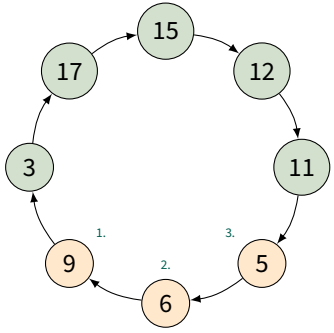
$$\begin{aligned} N &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-(k-1)) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \\ &= \frac{2nk - k^2 + k}{2} \\ &= nk - \frac{k(k-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- ➡ $\mathcal{O}(n^2)$ bei Ringgröße n und $k = n$
- Noch n zusätzliche Nachrichten für die Gewinnbenachrichtigung

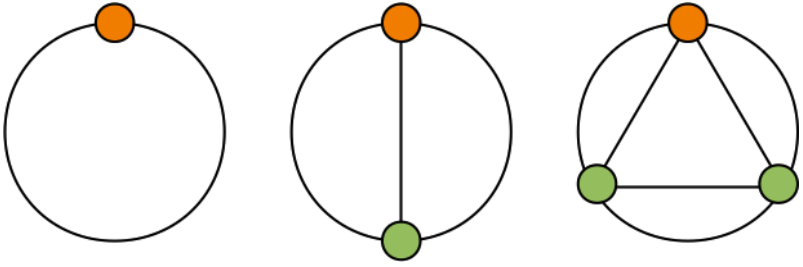
Exkurs: Chang/Roberts – Best-Case Nachrichten-komplexität

- Best case tritt ein, wenn die Initiatoren in aufsteigender Reihenfolge auf dem Ring angeordnet
- Alle außer dem größten Initiator verursachen nur eine Nachricht
- Der größte Initiator verursacht n Nachrichten ➡ $n + k - 1$ Nachrichten für die eigentliche Auswahl
- Wieder noch n zusätzliche Nachrichten für die Gewinnbenachrichtigung



Exkurs: Chang/Roberts: Mittlere Komplexität

- Nachrichtenkomplexität über alle möglichen $n!$ Permutationen der Nummern auf dem Ring
- Informale Argumentation
- Größter Initiator ➡ n Nachrichten (immer)
- 2.-größter Initiator ➡ $\frac{n}{2}$ Nachrichten im Mittel
- 3.-größter Initiator ➡ $\frac{n}{3}$ Nachrichten im Mittel
- ...
- ➡ i.-größter Initiator ➡ $\frac{n}{i}$ Nachrichten im Mittel



● betrachteter Initiator ● größerer Initiator

Exkurs: Chang/Roberts: Mittlere Komplexität (Forts.)

- Die average-case Nachrichtenkomplexität beträgt daher

$$nH_k \approx n \ln k$$

  mit $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$
  - Für unidirektionale Ringe ist dies optimal
  - H_k ist die k-te **Harmonische Zahl** (➡ **Harmonische Reihe**)

- Für sehr große Ringe werden fast nie mehr Nachrichten als im Durchschnitt benötigt (Rotem et al.)
- Wieder: n zusätzliche Nachrichten für die Gewinnbenachrichtigung

Itai und Rodeh

Zurück zu Itai und Rodeh

- **Annahmen**:
  - Annonymer Ring: kein Knoten hat eine (permanente) Identität
  - Ringgröße n muss bekannt sein
  - Jeder Knoten besitzt einen Zufallsgenerator ➡ Randomisierung
- **Unterschiede zu** Chang/Roberts:
  - Verfahren wird in mehreren Runden durchgeführt, von denen jede etwa einer Wahl in Chang/Roberts entspricht
  - Nachricht enthält neben einer ID noch einen Hopcount h und ein Flag f

Itai und Rodeh (Forts.)

- (Jeder) Initiator wählt eine **zufällige** ID und schickt Nachricht <ID,$f = 1$,$h = 0$>
- Jeder Knoten inkrementiert beim Weiterleiten einer Nachricht den Hopcount $h \leftarrow h + 1$
- Empfängt ein Knoten eine Nachricht mit seiner eigenen Identität, so werden zwei Fälle unterschieden
  - Ist $h \neq n$, so gibt es mindestens einen anderen Knoten mit gleicher Identität
    - f wird auf 0 gesetzt und die Nachricht weitergeleitet
  - Ist $h = n$, so hat er die Wahl gewonnen
    - Ist $f = 1$, dann ist er der einzige Gewinner und kann die Sieger-Nachricht losschicken
    - Ist $f = 0$, dann gibt es mehrere Gewinner

Itai und Rodeh (Forts.)

- Es werden iterativ Wahlgänge durchgeführt, bis ein eindeutiger Sieger feststeht
  - Nur die **Sieger** des aktuellen Wahlgangs nehmen aktiv am nächsten Wahlgang teil
    ➡ Hierfür wählt jeder Sieger eine **neue**, zufällige Identität und sendet diese um den Ring
  - Ausgeschiedene Knoten sind **passiv** und leiten lediglich Nachrichten weiter (mit inkrementiertem Hop-Count)
  - Nachrichten aus kleineren Wahlgängen werden **verschluckt**

Itai und Rodeh – Diskussion

- Es gibt keine Garantie, dass der Algorithmus jemals terminiert
- Aber: Die **Wahrscheinlichkeit**, dass er **nicht** terminiert, geht mit der Zeit gegen 0
- Grenzwert[2] für den Erwartungswert E für die Anzahl der Wahlgänge bei Anzahl von möglichen Identitäten $c = n$

$$E \leq e\frac{n}{n-1}$$

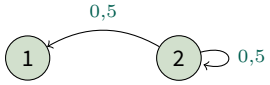
(e ist hier die **Eulersche Zahl**)

[2] Das ist eine Grobabschätzung, es gibt einen Grenzwert $E \leq 2{,}441715 \cdot n$

Itai und Rodeh – Diskussion (Forts.)

Ableitung des Erwartungswerts für $n = c = 2$

- Anwendung einer Markow-Kette



$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{1}{2^i} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots \\
&= 2
\end{aligned}
$$

- Ableitung ist auch für allgemeines n möglich

Itai und Rodeh – Diskussion (Forts.)

- Kenntnis der Ringgröße n ist eine sehr starke Anforderung
- **Abschwächung**: Ringgröße ist nur *ungefähr* bekannt: $\exists k, k \leq n < 2k$
  - Nachricht mit nichtkleinerer ID wird stets weitergeleitet, bis $h = 2k - 1$
    - mindestens eine Runde ist garantiert
  - Das Flag f wird gelöscht, wenn eine Nachricht mit der eigenen ID und einem Hop-Count von $h < k$ empfangen wird
    - Gibt es mehr als einen Sieger, erfährt **mindestens ein** Knoten davon und teilt es den anderen mit

Algorithmus für beliebige Graphen

- Der folgende Algorithmus geht auf Dolev et al [DIM97] zurück
- Er erlaubt die Lösung des Auswahlproblems für beliebige (zusammenhängende) Topologien
- Der Algorithmus ist dynamisch und **selbststabilisierend**:
  - Er **terminiert nie** und findet nach Fehlern (Ausfällen von Knoten oder Kanten) wieder (irgendwann) in einen korrekten Zustand zurück
- **Idee:** Konstruktion eines gerichteten Baums (*in-tree*), bei dem die Wurzel der Ausgewählte Knoten ist
- **Annahmen:**
  - Ein Knoten kann seine Nachbarn über die Kommunikationskanäle lokal identifizieren
  - Ein Knoten kann Variablen seiner Nachbarn abfragen (RPC); falls nicht, wird der Kanal als fehlerhaft (nicht vorhanden) angesehen

Algorithmus für beliebige Graphen (Forts.)

- Jeder Knoten ist immer entweder die **Wurzel** (*root*) eines Baumes, oder hat einen **Vaterknoten**
  - Vom Sohn auf den Vater ist eine Kante im Baum gerichtet
- Jeder Knoten hat folgende Variablen, die von den Nachbarn gelesen werden können:
  tid: Eine ID des Baums, zu dem der Knoten gehört
  d: Entfernung des Knotens zur Wurzel (für Wurzel: $d = 0$)
  c: Farbe (ein Wert aus $[0, \ldots, 7]$)
- Jeder Knoten führt in einer Endlosschleife folgende Schritte aus
  - Wenn ein Baum mit größerer tid gefunden wird, schließe dich ihm an ➡ Teilalgorithmus **Baumfusion**
  - Wenn ein Fehler erkannt wird, erkläre dich zur neuen Wurzel ➡ Teilalgorithmus **Fehlererkennung**
  - Wenn andere Bäume mit gleicher tid entdeckt werden, vergrößere zufällig die tid deines Baums ➡ Teilalgorithmus **Konkurrenzerkennung**

Algorithmus für beliebige Graphen (Forts.)

- **Baumfusion/Fehlererkennung**
  - Frage alle Nachbarn i ab und ermittle $tid_{max} = \max_i(tid_i)$ sowie $d_{min} = \min_{tid_i = tid_{max}}(d_i)$
  - Ist tid_{max} kleiner als eigene tid oder ist sie gleich, aber d_{min} ist größer als die eigene Distanz d, erkläre dich zur eigenen Wurzel
  - Sonst ist der Knoten mit $tid_i = tid_{max}$ der (ggf. neue) Vater, von dem die tid geerbt wird; die eigene Distanz wird auf $d = d_i + 1$ gesetzt

- **Anmerkungen:**
  - Falls man selbst vorher eine Wurzel war, wird die Anzahl der Bäume reduziert
  - Durch die Distanzüberprüfung werden Schleifen oder verschwindende Kanten entdeckt
  - Nach hinreichend vielen Durchläufen ohne Fehler entsteht ein Wald mit Bäumen mit jeweils gleicher tid

Algorithmus für beliebige Graphen (Forts.)

- **Konkurrenzerkennung**
  - Eine Wurzel wählt eine zufällige Farbe aus und initiiert ein Umfärben des Baums (Wellenverfahren)
  - Sobald alle Elemente des Baums das Umfärben quittiert haben, initiiert die Wurzel das nächste Umfärben
  - Entdeckt ein Knoten einen Nachbarknoten mit gleicher tid aber einer Farbe, die weder die aktuelle noch die vorherige Baumfarbe ist, wird der Wurzel eine Konkurrenz gemeldet
  - In diesem Fall vergrößert die Wurzel die tid zufällig und propagiert diese neue Baum-ID in ihrem Baum
- **Anmerkungen**
  - Da das nächste Umfärben erst beginnt, wenn das letzte beendet ist, zeigt eine andere Farbe als die aktuelle oder letzte einen fremden Baum an
  - Da die Farbe jeweils zufällig gewählt wird, sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig die gleichen Farben gewählt werden
  - Auch der Konkurrenzbaum kann eine Vergrößerung seiner tid initiiert haben; da diese aber um einen zufälligen Wert erfolgt, sinkt die Wahrscheinlichkeit auf gleiche IDs

Diskussion

- Der Algorithmus ist hier nur informal beschrieben, für formalere Betrachtungen und Korrektheitsbeweis siehe [DIM97]
- Hat der finale Baum eine Tiefe von D und jeder der n Knoten maximal N Nachbarn, so ist im fehlerfreien Fall die Rundenzahl bis zu Wahl genau einer Wurzel in $\mathcal{O}(N \cdot D \cdot \log n)$
- Die Terminierung kann nicht entdeckt werden, wenn nicht vorher die Gesamtanzahl von Knoten bekannt ist

Andere Ansätze zum Brechen der Symmetrie

- Ist die Topologie nicht symmetrisch und bekannt, so kann dies zum Brechen der Symmetrie unter anonymen Knoten genutzt werden
  - Beispiel: in einem Gitter (Grid) kann nach einem bestimmten Eckknoten gesucht werden
- In der Praxis kommen anonyme Systeme häufig bei Netzen aus Sensorknoten vor
- In diesem Fall können Sensorinformationen zum Symmetriebruch genutzt werden
  - GPS-Koordinaten
  - Relative Position anderer Knoten

Literatur

[Mat89] Mattern, F.: *Verteilte Basisalgorithmen*. Springer, 1989 , Kapitel 2

[ChRo79] Chang, E. und R. Roberts: „An improved algorithm for decentralized extrema-finding in circular configurations of processes“. *Communications of the ACM*, 22(5)1979, 281–283

[DIM97] Dolev, S., A. Israeli und S. Moran: „Uniform Dynamic Self-Stabilizing Leader Election“. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 8(4)1997, 424–440