Verlässliche Systeme

2. Kapitel

Auffrischung: Stochastik

Prof. Matthias Werner
Professur Betriebssysteme

2.1 Grundlagen

Motivation

- Fehler und Last lassen sich in der Regel nicht deterministisch vorhersagen ➡ zufällig
- Jedoch: zufällige Erscheinungen lassen sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung / Stochastik beschreiben
- **Wahrscheinlichkeitsrechnung**
  - Ursprünglich aus Betrachtungen zum Glücksspiel entstanden
  - Zunächst empirisch definiert (LAPLACE), später axiomatisch (KOLMOGOROW)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung ist Teilgebiet der Stochastik; diese umfasst u.a. Fehlerrechnung, Statistik, etc.

Grundbegriffe

Zufallsexperiment: Ein Experiment (Versuch), dessen Ausgang durch keine Regel exakt bestimmbar ist, z.B. Würfeln

Ereignisraum: Menge der bei einem Experiment möglichen Ereignisse (auch Ereignisfeld, Ω)

Ereignis: Jedes (theoretisch) mögliche Ergebnis eines Experiments

- **sicheres Ereignis:** Ein Ereignis, das bei einem Experiment immer eintritt (entspricht Ω)
- **unmögliches Ereignis:** Ein Ereignis, das bei einem Experiment niemals eintritt (entspricht $\emptyset$)
- **zufälliges Ereignis:** Ein Ereignis, das weder sicher noch unmöglich ist ➡ *Ereignisse können sich durch mengentheoretischen Verknüpfungen zu weiteren Ereignissen kombinieren lassen.*

Elementarereignis: Ein Ereignis, das sich nicht durch die Vereinigung anderer Ereignisse darstellen lässt
➡ *Das unmögliche Ereignis zählt nicht als Elementarereignis*

Zufallsvariable: Abbildung der möglichen Ausgänge eines Experimentes auf reelle Zahlen

Wahrscheinlichkeit

- **Beobachtung:** Die relative Häufigkeit eines bestimmten Ausgangs (Ereignis A) stabilisiert sich für eine große Zahl von Wiederholungen des Experiments
- **Notation:** $\Pr(A)$ oder $P(A)$ = Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintrifft
- **Definition nach LAPLACE:**

$$\Pr(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Elementarereignisse}}$$

- **Definition nach KOLMOGOROW:** Gegeben ist ein Ereignisraum Ω und Ereignisse A_i
  1. $\Pr(A_i) \geq 0$
  2. $\Pr(\Omega) = 1$
  3. $\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \cdots$ wenn jedes Paar A_i, A_j disjunkt ist (d.h., $A_i \cap A_j = \emptyset$)

Wahrscheinlichkeiten: grundlegende Eigenschaften

Es gibt eine Reihe von Eigenschaften, die sich direkt aus den Axiomen ableiten lassen:

- $\Pr(\emptyset) = 0$
- $\Pr(A) = 1 - \Pr(\bar{A})$, wobei $\bar{A}$ das Komplementärereignis zu A ist
- $\Pr(\bar{A} \cap B) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
- $\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$
- $B \subseteq A \Rightarrow \Pr(B) \leq \Pr(A)$
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

Unabhängigkeit und gegenseitiger Ausschluss

Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Zwei Ereignisse A und B **schliessen sich gegenseitig aus**, wenn

$$A \cap B = \emptyset$$

Bitte beachten!

Mitunter werden Unabhängigkeit und gegenseitiger Ausschluss fälschlich gleichgesetzt.
Offensichtlich kann aber gelten: $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \neq 0$, wogegen beim gegenseitigen Ausschluss $\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0$ gilt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $\Pr(A|B)$ eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass B schon eingetreten oder bekannt ist, berechnet sich:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad \text{dabei muss } \Pr(B) \neq 0 \text{ gelten}$$

Für unabhängige Ereignisse A und B gilt:

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Forts.)

Zwei Ereignisse A und B sind **bedingt unabhängig**, wenn

$$\Pr((A \cap B)|C) = \Pr(A|C)\,\Pr(B|C)$$

Merke:

Bedingte Unabhängigkeit impliziert nicht Unabhängigkeit!

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt:

Theorem 2.1 (Multiplikationstheorem)

$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B)\,\Pr(B) = \Pr(B|A)\,\Pr(A)$ *(mit* $\Pr(A), \Pr(B) \neq 0$*)*

Totale Wahrscheinlichkeit

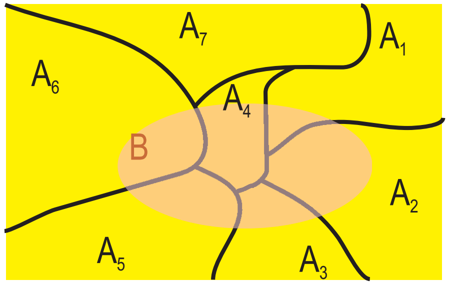
Es seien $A_1, A_2, \dots A_n$ seien sich gegenseitg ausschließende zufällige Ereignisse so dass

- $\forall i, j, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_i A_i = \Omega$

Es sei B ein beliebiges zufälliges Ereignis mit $\Pr(B) > 0$
Dann gilt:

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \Pr(B|A_i)$$

Ω



Satz von BAYES

Es seien $A_1, A_2, \dots A_n$ seien sich gegenseitg ausschließende zufällige Ereignisse so dass

- $\forall i, j, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_i A_i = \Omega$
- alle $\Pr(A_i)$ bekannt sind (A-Priori-Wahrscheinlichkeiten)

Es sei $B \subseteq \Omega$ ein beliebiges zufälliges Ereignis mit $\Pr(B) > 0$
Dann gilt:

Theorem 2.2 (Satz von BAYES)

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A_i) \Pr(B|A_i)}{\sum_j \Pr(A_j) \Pr(B|A_j)}$$

Man nennt $\Pr(A_i|B)$ A-posteriori-Wahrscheinlichkeit

2.2 Zufallsvariablen und -verteilungen

- $\Pr(X \leq t)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine **Zufallsvariable** X einen Wert kleiner/gleich t hat
- Man kann t als Funktionsparameter auffassen
- Die Funktion $F_X(t) = \Pr(X \leq t)$ heißt **Verteilungsfunktion** von X

  ($t, F_X(t) \in \mathbb{R}$)
- Mit ihrer Hilfe lässt sich leicht die Wahrscheinlichkeit errechnen, dass X einen Wert im Intervall $(a, b]$ annimmt:

$$\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Zufallsvariablen und -verteilungen (Forts.)

- Stetige Verteilungen werden häufig durch ihre **Dichtefunktion** $f_X(t)$ beschrieben

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(\tau) d\tau$$

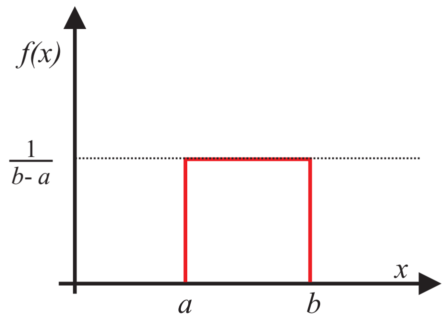
- Dann gilt:

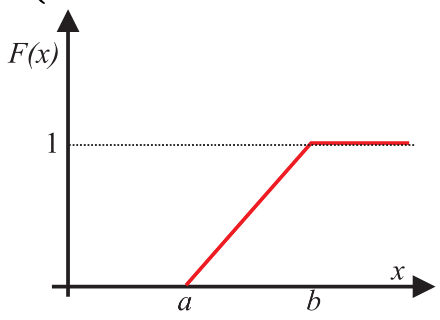
$$\Pr(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(t) dt$$

Typische Verteilungen: Gleichverteilung

Bei einer Gleichverteilung ist jeder Wert einer Zufallsvariablen X innerhalb eines Intervalls $I = [a, b]$ gleichwahrscheinlich.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{ für } a \leq t \leq b \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , \text{ für } a \leq t \leq b \\ 1 & , \text{ für } t > b \end{cases}$$

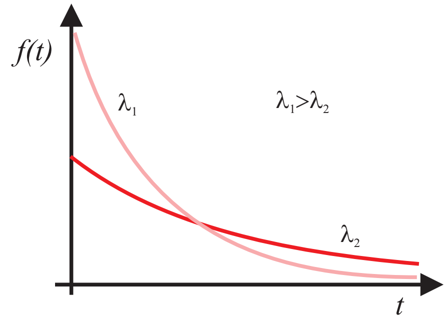


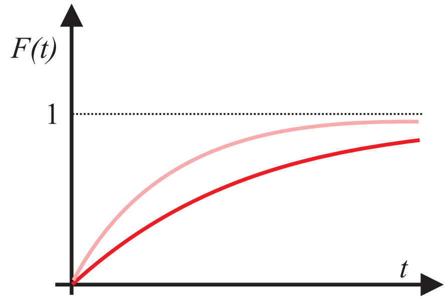


Typische Verteilungen: Exponentialverteilung

Bei Zerfallsprozessen hängen Zufallsvariablen häufig von der verbliebenen Restmenge ab.
Dann erhält man eine **Exponentialverteilung**.

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } t > 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$



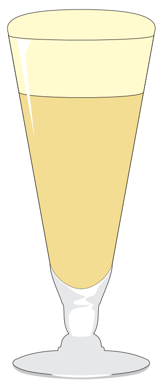


Warum Exponentialfunktion?

Annahme: Der Zerfallsanteil pro Zeiteinheit ist konstant.

Anders ausgedrückt: Die Menge zerfallender Elemente pro Zeiteinheit ist proportional zur vorhandenen Menge (Beispiel: Bierschaum)

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\lambda \cdot x(t) \qquad (\star)$$



Warum Exponentialfunktion? (Forts.)

($\star$) ist eine DGL. Sie hat den Lösungsansatz

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Bei Verteilungsfunktionen lautet die Nebenbedingung, dass $\Pr(\Omega) = 1$, d.h. in diesem Fall $\int_0^\infty x(t)dt = 1$

$$\int_0^\infty x_0 e^{-\lambda t} dt = 1 \qquad x_0 \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = 1 \qquad x_0 \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^\infty = 1$$

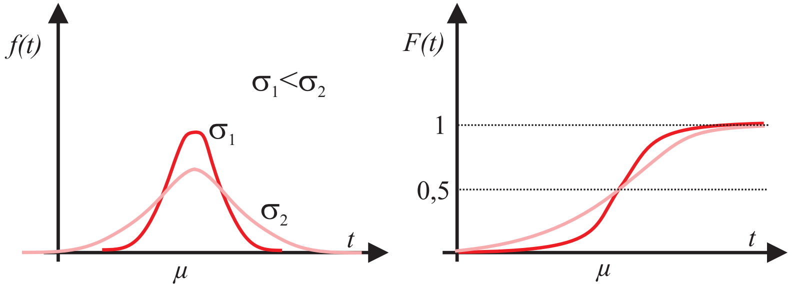
$$-x_0 \frac{[e^{-\lambda\infty} - e^{-\lambda 0}]}{\lambda} = 1 \qquad x_0 \cdot \frac{1}{\lambda} = 1 \qquad x_0 = \lambda$$

Typische Verteilungen: Normalverteilung

Die vermutlich bekannteste Verteilung: **Normal-** oder GAUSS- **Verteilung**.

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (\sigma > 0)$$

Die Verteilungsfunktion $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ ist nicht elementar berechenbar. Jedoch gibt es Tabellen für eine normierte Normalverteilung ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$).



Erwartungswert

Verteilungen sind durch Dichtefunktionen vollständig charakterisiert
Aber: mitunter „kompaktere" Parameter gesucht

- **Erwartungswert:** Eine Art Mittelwert, gegen den die Zufallsvariable bei einer großen Anzahl von Versuchen strebt

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_X(t)dt$$

- Regeln für den Erwartungswert:
  - $\mathrm{E}[aX + b] = a\,\mathrm{E}[X] + b$
  - $\mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i]$ (wenn alle X_i unabhängig)

Varianz

- Ein Erwartungswert beschreibt eine Art „Masseschwerpunkt".
- „Nähe" der Verteilungswerte zu diesem Schwerpunkt:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2]$$

- $\mathrm{Var}[X]$ wird **Varianz** genannt (auch etwas ungenau Streuung oder Dispersion).

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathrm{E}[X])^2 f_X(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)dt\right)^2$$

Momente gängiger Verteilungen

Verteilung	**Dichte** $f(x)$	$\mathrm{E}[X]$	$\mathrm{Var}[X]$
Gleich	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential	$\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

2.3 Verknüpfung von Zufallsvariablen

- Experimente können auch von zwei oder mehr Zufallsvariablen abhängen
- Verknüpfung einer Menge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ durch eine Funktion $Z = g(X_1, X_2, ..., X_n)$ ergibt wieder eine Zufallsvariable

Allgemein für zwei Verteilungen:

$$F_Z(t) = \Pr(Z \le t) = \iint\limits_{g(x,y)\le t} f_{XY}(x,y)dx\ dy$$

Dabei ist $f_{XY}(x,y)$ die Dichte der gemeinsamen Verteilung $F_{XY}(x,y) = \Pr(X \le x \wedge Y \le y)$.

Gemeinsame Verteilungen

- Gemeinsame Verteilung $f_{XY}(x,y)$ beschreibt Abhängigkeit zwischen X und Y
- Für unabhängige X und Y gilt:

$$F_Z(t) = \Pr(Z \le t) = \iint\limits_{g(x,y)\le t} f_X(x) f_Y(y)dx\ dy$$

Spezialfälle

Multiplikation: ($Z = X \cdot Y, X, Y \ge 0$)

$$f_Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau) f_Y(\frac{t}{\tau}) \frac{1}{|\tau|} d\tau$$

Addition: ($Z = X + Y, X, Y > 0$)

$$f_Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau) f_Y(t-\tau) d\tau$$

- Man nennt die Operation $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$ die **Faltung** von f_1 und f_2 und schreibt $f_1(t) * f_2(t)$.

Anwendung der LAPLACE-Transformation

Da die Faltung häufiger gebraucht wird, aber Integralrechnung nicht immer trivial ist, wird mitunter die **LAPLACE-Transformation** eingesetzt.

$$\begin{array}{ccc} z = f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Z = F(s) \\ \downarrow & & \downarrow \text{Lösung im Bildbereich} \\ z(t) & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Z(s) \end{array}$$

Unter anderem gilt: $\mathcal{L}\left(f_1(t) * f_2(t)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t)\right) \cdot \mathcal{L}\left(f_2(t)\right)$

Anhang A: LAPLACE-Transformation

- Definition
  - Hintransformation

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-s\cdot t}dt$$

  - Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

(j ist hier die imaginäre Einheit)

- Schreibweisen:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) \qquad\qquad F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t)$$

Berechnung

- ... der harte Weg: Berechnung des Integrals
- ...der lange Weg: zerlegen und Transformationstabellen:

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\delta(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s}$	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}

Berechnung (Forts.)

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$t(t)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$	$\frac{1}{1+sT}$	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{1}{s(1+sT_1)} \cdot \frac{1}{(1+sT_2)}$	$1 - \frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$

Rechenregeln

- **Überlagerungssatz:** $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
- **Ähnlichkeitssatz:** $f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{a}\, F(\frac{s}{a}), a \neq 0$
- **Verschiebungssatz:** $f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-sT}F(s)$
- **Dämpfungssatz:** $e^{at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s-a)$
- **Differentiationssatz:** $\frac{d}{dt}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sF(s) - f(-0)$

  ...und für höhere Ableitungen:

$$\frac{d^k}{dt^k}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^kF(s) - s^{k-1}f(-0) - s^{k-2}\dot{f}(-0) - \cdots - f^{(k-1)}(-0)$$

Rechenregeln (Forts.)

- **Integrationssatz:** $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}F(s)$
- **Differentiation der Bildfunktion:** $t^k f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$
- **Faltungssatz:** $f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(s)F_2(s)$
- **Anfangswertsatz:** $f(+0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s\ F(s)$
- **Endwertsatz:** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\ F(s)$