



## Algorithmen und Programmierung

### 7. Kapitel

# Entwurf und Korrektheit von Algorithmen

Prof. Matthias Werner

Professur Betriebssysteme

## Problemlösen

Man beachte:

Algorithmenentwurf ist Problemlösen.

Allgemeines Vorgehen beim Problemlösen:

1. Verstehen Sie das Problem!
2. Was ist das Ziel? Was ist gegeben?
3. Modellieren Sie das Problem!
4. Lösen Sie das Modellproblem!
5. Interpretieren Sie die Lösung!

## 7.1 Idee

### Warnung!

Es gibt **keinen** (exakten) Algorithmus, um Algorithmen zu entwickeln.

Abstraktionsvermögen, Kreativität und Erfahrung tragen aber dazu bei, (gute) Algorithmen zu entwickeln. Jede dieser Eigenschaften kann durch Training verbessert werden.

- ▶ Jedoch verlangt jeder Algorithmus **Problemverständnis** und (mindestens) eine **Idee**

## Problemverstehen

### Merke

Ich habe ein Problem **dann und erst dann** verstanden, wenn ich es anderen erklären kann!

- ▶ **Interessante Fragen:**
  - ▶ Woraus genau besteht die Eingabe?
  - ▶ Was genau ist das gewünschte Ergebnis oder die gewünschte Ausgabe?
  - ▶ Kann ich ein Minimalbeispiel angeben, das von Hand zu lösen ist? Was passiert, wenn ich dies mache?
  - ▶ Brauche ich eine optimale, eine nahezu optimale oder nur irgendeine Lösung? Was heißt in diesem Problem „optimal“?
  - ▶ Wie groß ist eine typische Probleminstanz? 10 Objekte? 1000 Objekte? 1000000 Objekte?
  - ▶ Wie wesentlich ist Geschwindigkeit in meinem Problem? Muss es in Sekunden gelöst sein? Eine Minute? Eine Stunde? Ein Tag?
  - ▶ Wie kann das Problem in einer Grafik beschrieben werden?
  - ▶ Welche Gemeinsamkeiten hat das Problem mit anderen bekannten Problemen?
  - ▶ Was unterscheidet dieses Problem von anderen ähnlichen Problemen?

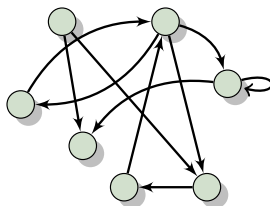
## Suchen der Idee

- ▶ Niemand kann Ihnen abnehmen, die Lösungsidee zu finden
- ▶ Jedoch gibt es mehrere typische Ansätze:
  - ▶ **Invarianten**
    - Herausfinden, was sich **nicht** ändert
  - ▶ **Induktion**
    - Übertragung vom (hoffentlich einfachen) Einzelfall auf alle Fälle
  - ▶ **Abstraktion und Nachnutzung**
    - Das Problem so **modellieren**, dass es mit anderen (bekannten) Problemen übereinstimmt
  - ▶ **Suchen** mit „brutaler Gewalt“ (*brute force*)
    - Alle infrage kommenden Fälle untersuchen, ob sie die Lösung bieten
  - ▶ **Intelligentes Suchen**
    - Wie „brute force“, aber vorher den Suchraum einschränken

## Exkurs: Graphen

### Exkurs: Graphen

- ▶ **Graphen** sind ein häufig benutztes Mittel zur Modellierung von Sachverhalten
- ▶ Wir haben sie bereits ständig gebraucht, ohne sie zu benennen
- ▶ Vorteile von Graphen: gute grafische Representation
  - ▶ Knoten = Kreise, Punkte (engl.: *nodes, vertices*)
  - ▶ Kanten = Linien, Pfeile (engl.: *edges, arcs*)
- ▶ Ein ganzer Bereich der Mathematik beschäftigt sich mit Graphen
  - **Graphentheorie**



## Modellierung

- ▶ Durch Modellierung kann ein Problem auf das Wesentliche beschränkt werden
- ▶ Als Modellierungsansätze sind vor allem grundlegende Konzepte aus der Mathematik geeignet:
  - ▶ **Mengen** (ungeordnete Elemente) und **Multimengen** (mehrfaches Vorkommen erlaubt)
  - ▶ **Permutationen** (geordnete Elemente)
  - ▶ **Hierarchien/Bäume**
  - ▶ **Graphen**
  - ▶ **Punkte** (Koordinaten in geometrischen Räumen)
  - ▶ **Polygone** (Regionen in geometrischen Räumen)
  - ▶ **Zeichenketten**

## Exkurs: Graphen (Forts.)

### Definition 7.1 (Graph)

Ein **Graph** ist eine Menge von **Knoten**  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , die durch eine (Multi-)Menge von **Kanten**  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  in Beziehung stehen können. Kanten können **ungerichtet** oder **gerichtet** sein. Ungerichtete Kanten werden als Knotenmengen  $\{v_i, v_j\}$  aufgefasst, gerichtete Kanten als geordnete Knotenpaare (Tupel)  $(v_i, v_j)$ .<sup>1</sup> Gerichtete Kanten werden in der Regel durch Pfeilspitzen repräsentiert.

Kanten können Werte (Gewichte) zugewiesen werden,  $w : E \rightarrow \mathbf{R}$ . In diesem Fall spricht man von einem **gewichteten Graph**.

<sup>1</sup>Häufig wird auch bei ungerichteten Graphen die Tupel-Schreibweise genutzt und  $(v_i, v_j) \equiv (v_j, v_i)$  vorausgesetzt.

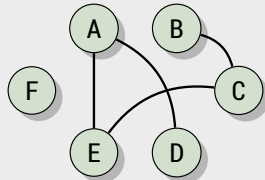
## Exkurs: Graphen (Forts.)

### Beispiel 7.1

Anton, Bernd, Claudia, Dora, Ernst und Franziska seien bei dem Social-Web-Dienst „FaceVZ“ angemeldet. Es sind jeweils miteinander „befreundet“:

- ▶ Anton und Dora
- ▶ Bernd und Claudia
- ▶ Anton und Ernst
- ▶ Claudia und Ernst

Dieser Sachverhalt lässt sich mit folgenden (ungerichteten) Graphen modellieren:

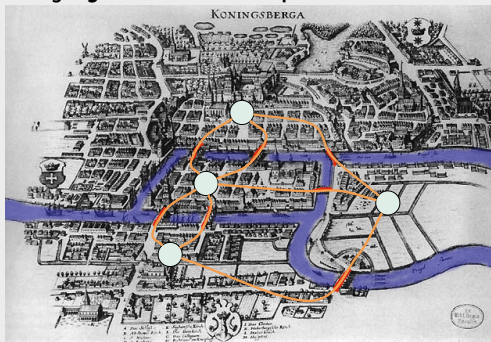


## Exkurs: Graphen (Forts.)

- ▶ Durch die Reduzierung auf das (Graphen-)modell abstrahiert sich die Problemstellung

### Beispiel 7.3 (Königsberger Brückenproblem)

Problem aus dem frühen 18. Jahrhundert: Gibt es in Königsberg einen Weg, bei dem man alle sieben Brücken über den Pregel **genau einmal** überquert?



Leonhard Euler löste dieses Problem 1736 mit Hilfe der Graphentheorie.

## Exkurs: Graphen (Forts.)

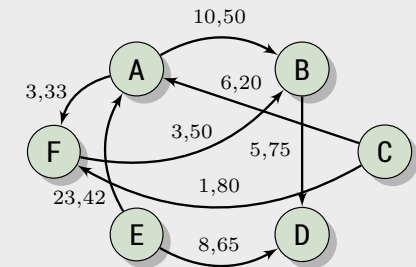
### Beispiel 7.2

Anna, Brigitte, Charlotte, Denise, Eva und Friederike gehen ab und zu gemeinsam in eine Kneipe. Wenn, was häufiger vorkommt, die eine der Damen ihr Portemonnaie vergessen hat, zahlt eine andere für sie.

Am Ende des Jahres ergibt sich folgendes Schuldverhältnis:

- ▶ Anna schuldet Brigitte 10,50€ und Friederike 3,33€
- ▶ Brigitte schuldet Denise 5,75€
- ▶ Claudia schuldet Anna 6,20€ und Friederike 1,80€
- ▶ Eva schuldet Anna 23,42€ und Denise 8,65€
- ▶ Friederike schuldet Brigitte 3,50€

Die ist darstellbar in einem gerichteten und gewichteten Graphen:



## Exkurs: Graphen (Forts.)

- ▶ Das **Modell** des Graphen ist von der **Datenstruktur** zu unterscheiden
- ▶ Beispielsweise kennt C keinen Datentyp für Graphen → dieser muss ggf. selbst definiert werden

### Achtung!

Nur weil ein Problem mit einem bestimmten Ansatz **modelliert** wurde, bedeutet dies **nicht** unbedingt, dass auch eine entsprechende Datenstruktur für diesen Ansatz gebraucht wird.

## Exkurs: Graphen (Forts.)

Falls tatsächlich eine solche Datenstruktur gebraucht wird, gibt es verschiedene Möglichkeiten, z.B.:

- ▶ **Adjazenzmatrix:** zweidimensionales Array, bei dem jedes Element  $a_{i,j}$  beschreibt, ob vom Knoten  $v_i$  zum Knoten  $v_j$  eine Kante vorhanden ist oder welches Gewicht diese hat

```
enum { NumNodes=5};
bool a[NumNodes][NumNodes];
:
a[0][1]= true;
// = edge (v0,v1) exists
```

- ▶ Eignet sich besonders für gerichtete Graphen  
Beliebige andere Ansätze sind denkbar...

- ▶ **Verbundstypen und Zeiger:** Knoten können durch `struct`-Typen und Kanten durch darin enthaltene Zeiger modelliert werden

```
enum{ MaxDegree = 6};
struct node;
typedef struct node{
    int id;
    struct node *in[MaxDegree];
    struct node *out[MaxDegree];
} node_t;
```

- ▶ Eignet sich besonders für Graphen mit variabler Knotenanzahl

## Von der Idee zum Algorithmus

- ▶ Hat man eine Idee gefunden, muss der Algorithmus entwickelt werden
- ▶ Vorgehen der **schrittweisen Verfeinerung (Top-Down-Methode)**
  1. Beschreibe die Grobidee zur Lösung des Problems
  2. Zerlege das Problem in Unterprobleme
  3. Verfahre mit jedem Unterproblem entsprechend
- ▶ Wann beenden?
  - ➔ Wenn **ausführbare Einzelschritte** gefunden sind
- ▶ Fähigkeiten des ausführenden Systems müssen bekannt sein

## Exkurs: Graphen (Forts.)

- ▶ Da die Graphentheorie ein ziemlich altes Gebiet der Mathematik ist, gibt es viele Sätze und Standardalgorithmen, die man direkt für die Lösung eines vorliegenden Problems nutzen kann
- ▶ Beispiele:
  - ▶ Satz über die Existenz von Euler-Wegen und -Kreisen
  - ▶ Kürzeste Wege in einem gewichteten Graphen
  - ▶ Maximaler Fluss zwischen zwei Knoten in einen gewichteten Graph
  - ▶ Effektivität von Suchen in Bäumen
- ▶ Eine kompakte Darstellung von Graphenalgorithmen bietet z.B. [Bra94]: **Andreas Brandstädt. Graphen und Algorithmen. Teubner, 1994**

Ende des Exkurses

## 7.3 Spezifikation

- ▶ Ein Algorithmus muss irgendwie beschrieben werden
- ▶ Eine Variante ist eine konkrete Implementation in einer konkreten Programmiersprache
- ▶ **Problem:** Eine Programmiersprache kennt nicht alle möglichen Konzepte

### Beispiel 7.4

C kennt keine Datentypen und Operationen für mathematische Mengen. Mengenoperationen würden in C kompliziert aussehen und daher evtl. die **Idee** eines Algorithmus verschleiern.

- ▶ **Abhilfe:** Beschreibung des Algorithmus in natürlicher Sprache
- ▶ **Problem:** Mangel an Exaktheit

## Spezifikation (Forts.)

- ▶ Deshalb werden Algorithmen (wenn die algorithmische Idee betont werden soll) in **Spezifikationssprachen** beschrieben
- ▶ Es gibt sehr viele Spezifikationssprachen
- ▶ Viele dienen nur dazu, die **Anforderungen** an den Algorithmus zu beschreiben → für uns (hier) nicht interessant
- ▶ Es gibt **formale** und halbformale Spezifikationssprachen
  - ▶ Formale: **Automatisch** verarbeitbar, z.B. in Theorem Beweisern → häufig schwer zu lesen
  - ▶ Halbformale: Dient nur zur **Kommunikation** über Algorithmen
- ▶ Wir nutzen die wahrscheinlich gängigste halbformale Spezifikationssprache für imperative Algorithmen: **Pseudocode**

## Pseudocode: Syntax und Layout

Anweisungen in Pseudocode:

- ▶ Auswertung eines Ausdrucks und **Speicherung** des Wertes in einer Variablen

```
var ← expression
```

- ▶ **Verzweigung**

```
if condition then
  statement(s)
end if
```

oder

```
if condition then
  statement(s)
else
  statement(s)
end if
```

## Pseudocode

- ▶ Jeder von Ihnen hat schon Pseudocode gesehen<sup>2</sup>
- ▶ Ähnlich PASCAL
- ▶ Legt einen Satz von Anweisungen fest
- ▶ Lässt beliebige mathematische Terme zu
- ▶ Lässt Sätze in natürlicher Sprache zu
  - ▶ Sollte möglichst wenig gebraucht werden
  - ▶ Müssen mit Verb beginnen und keine Nebensätze haben

### Hinweis

Da Pseudocode niemals ausgeführt wird, gibt es eine Vielzahl verschiedener Formen. In der Regel ist Pseudocode aber stets intuitiv lesbar, wenn man jemals mit einer imperativen Programmiersprache zu tun gehabt hat.

<sup>2</sup>Oder er/sie hat die Hausaufgaben nicht vollständig gelesen.

## Pseudocode: Syntax und Layout (Forts.)

- ▶ **While-Schleife**

```
while condition do
  statement(s)
end while
```

- ▶ **Repeat-Until-Schleife**

```
repeat
  statement(s)
until condition
```

- ▶ **For-Schleife**

```
for expression do
  statement(s)
end for
```

## Pseudocode: Syntax und Layout (Forts.)

### ► Eingabe/Vorbedingung

**Require:** requirement(s)

### ► Ausgabe/Nachbedingung

**Ensure:** postcondition(s)

### ► Kommentare

[statement] ▷ comment

oder

[statement] { comment }

## Beispiel

### ► Beispiel „Euklidischer Algorithmus“ (ähnlich zu Aufgabe 6 auf Aufgabenblatt 3)

**Require:**  $A, B \in \mathbb{N}, A > 0 \wedge B > 0$

**Ensure:**  $a = b = \text{gcd}(A, B)$  ▷ gcd: greatest common divisor

```

a ← A; b ← B
while a ≠ b do
  if a < b then
    b ← b - a
  else
    a ← a - b
  end if
end while
    
```

### ► Künftig werden wir Algorithmen häufig in Pseudocode angeben, wenn wir von konkreten Datenstrukturen abstrahieren können

## Pseudocode: Syntax und Layout (Forts.)

### ► Unteralgorithmen

```

procedure NAME(parameter)
  statement(s)
  [return expression]
end procedure
    
```

### ► Aufruf

NAME(parameter)

oder

**call** NAME(parameter)

## Korrektheit

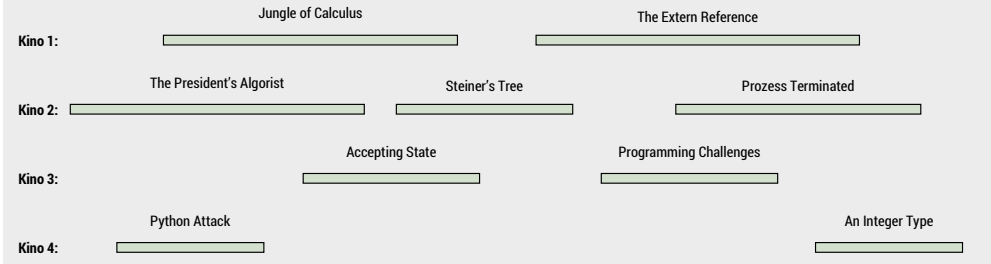
- Wenn ein Ansatz gefunden wurde, muss seine **Korrektheit** geprüft werden
- Zunächst sollte die Korrektheit der **Idee** geprüft werden, dann die anschließend die des konkreten Algorithmus
- Die Korrektheit einer Idee kann nicht formal geprüft werden
- Folgendes sollte überdacht werden:
  - Funktioniert die Idee allgemein oder nur in einem Spezialfall?
  - Gibt es Spezialfälle, in denen die Idee nicht funktioniert? Sind diese Fälle relevant?
  - Versuche, ein Gegenbeispiel zu finden
  - Extremfälle helfen

## Beispiel

### Beispiel 7.5

Sie sind Fan oder sogar Juror bei einem Filmfestival. Sie wollen soviel Filme wie möglich anschauen, die aber leider z.T. in verschiedenen Kinos laufen und sich zeitlich überschneiden.

Wie sollte Ihr allgemeines Vorgehen aussehen, damit Sie möglichst viele Filme sehen?



## Beispiel (Forts.)

- ▶ **3. Idee: EXHAUSTIVSEARCH** → funktioniert
  - ▶ Konstruiere alle Mengen von Filmen
  - ▶ Werfe alle Mengen weg, in denen sich mindestens zwei Filme überlappen
  - ▶ Wähle die Menge(n) mit den meisten Filmen aus
- ▶ **4. Idee: EARLIESTCOMPLETION** → funktioniert effizient
  - ▶ Wähle den Film, der zuerst beendet ist
  - ▶ Streiche alle überlappenden Filme
  - ▶ Starte von vorn bis kein Film übrig

## Beispiel (Forts.)

- ▶ **Modellierung:**
  - ▶ **Gegeben** ist eine Menge  $I$  von Intervallen
  - ▶ **Gesucht** ist die größte Untermenge nichtüberschneidender Intervalle
- ▶ ~~1. Idee: EARLIEST JOBS~~
  - ▶ Wähle den Film, der als erster anfängt
  - ▶ Streiche alle überlappenden Filme
  - ▶ Starte von vorn bis kein Film übrig
- ▶ ~~2. Idee: SHORTEST JOBS~~
  - ▶ Wähle den kürzesten Film
  - ▶ Streiche alle überlappenden Filme
  - ▶ Starte von vorn bis kein Film übrig

## Beispiel (Forts.)

- ▶ Betrachten weiteres Beispiel

### Beispiel 7.6 (Traveling Salesman)

Ein Vertreter (Handlungsreisender) muss in verschiedene Städte fahren und anschließend nach Hause zurückkehren.

Wie muss er seine Route planen, damit die zurückzulegende Gesamtstrecke möglichst kurz ist?

- ▶ **Modellierung:**
  - ▶ Nutzen gewichteten Graphen
  - ▶ Knoten sind Städte
  - ▶ Kanten zwischen zwei Knoten (Städten) haben Entfernung als Kantengewicht

## Beispiel (Forts.)

- ▶ ~~1. Idee: NEAREST NEIGHBOR~~
  - ▶ Wähle als erstes Ziel die nächstliegende Stadt aus
  - ▶ Wiederhole solange, bis keine unbesuchte Stadt übrig ist
  - ▶ Kehre nach Haus zurück
- ▶ ~~2. Idee: CLOSEST PAIR~~
  - ▶ Wähle die beiden Städte aus, die am nächsten sind
  - ▶ Streiche alle Städte, die bereits zwei Verbindungen haben
  - ▶ Wiederhole, bis alle Städte verbunden sind

## Algorithmenkorrektheit

- ▶ Auch der fertige Algorithmus muss auf seine **Korrektheit** geprüft werden
- ▶ Mitunter beinhaltet die Idee gleich einen kompletten Algorithmus, so dass gleich der konkrete Algorithmus geprüft werden kann
- ▶ Prinzipiell gibt es **zwei** Möglichkeiten:
  - ▶ **Erschöpfendes Testen**  
**Ausschluss fehlerhaften Verhaltens** einer Implementation des Algorithmus durch Ausführung (Test) **mit jeder möglichen Instanz der Eingabe**
  - ▶ **Korrektheitsbeweis**  
**Nachweis korrekten Verhaltens** durch Nutzung von **mathematischen Methoden**

## Beispiel (Forts.)

- ▶ **3. Idee: EXHAUSTIVESEARCH** → **funktioniert** (theoretisch)
  - ▶ Konstruiere alle möglichen Wege
  - ▶ Wähle den kürzesten aus
- ▶ Ein auf dieser Idee basierender Algorithmus ist **extrem** langsam
  - ▶ Er muss bei  $n$  Städten  $\frac{n-1}{2}!$  Wege vergleichen
  - ▶ Bei  $n = 30$  sind dies 4.420.880.996.869.850.977.271.808.000.000 ( $\approx 4,4 \cdot 10^{30}$ ) verschiedene Wege
- ▶ Der derzeit<sup>3</sup> schnellste Computer der Welt „Sunway TaihuLight“ würde für ein Problem mit 30 Städten mehrere Millionen(!) Jahre arbeiten!
- ▶ Konzept funktioniert nur bei **sehr** kleinen Problemen

### Merke

Für dieses Problem gibt es keine effektivere Lösung.

Man begnügt sich daher in der Praxis mit Näherungslösungen. Ein solcher Algorithmus, der keine korrekte Lösung garantiert, heißt **Heuristik**.

<sup>3</sup>September 2016

## Probleme

### Merke

Erschöpfendes Testen ist in der Regel **unmöglich**, da der Eingaberaum meist sehr groß oder sogar unendlich ist.

- ▶ Durch **teilweises** Testen kann das Vertrauen in die Korrektheit eines Programmes gestärkt werden, es ersetzt aber keinen Nachweis
- ▶ Die gute Auswahl von Testfällen ist schwierig



## Probleme (Forts.)

### Merke

Korrektheitsbeweise auf Implementationsebene sind i.d.R. wegen mangelnder Formalisierung/Formalisierbarkeit der Implementation **schwierig oder unmöglich**.

- ▶ Ersatzweise wird der Korrektheitsbeweis auf einer **abstrakteren Ebene** durchgeführt → Fehler bei Umsetzung in konkrete Implementation möglich
- ▶ Abhilfe können (bis zu einem gewissen Maß) Tools, die selbst formal bewiesen sind, schaffen.
  - ▶ Allgemein ist dies aber nicht möglich → **Gödelscher Unvollständigkeitssatz**
- ▶ Beschäftigen uns hier mit Beweisen (nicht Testen)

## Deduktion

- ▶ Deduktion ist der „klassische“ Beweis durch Kombination von Prämissen

### Beispiel 7.7

- ▶ **Prämisse 1:** Alle Menschen sind sterblich
- ▶ **Prämisse 2:** Alle Könige sind Menschen
- ▶ **Folgerung:** Alle Könige sind sterblich

- ▶ Die Korrektheit der Prämissen muss entweder axiomatisch gegeben oder bereits bewiesen sein

## 7.4 Beweise

- ▶ Was ist ein Beweis?

### Beweis – informale Definition

Ein Beweis ist eine Herleitung einer Aussage aus bereits bewiesenen Aussagen und/oder Grundannahmen (Axiomen).

- ▶ Wir kennen (aus der Mathematik) nur wenige (auch kombinierbare) Beweismethoden
  - ▶ Deduktion
  - ▶ Vollständige Fallunterscheidung (Aufzählung)
  - ▶ Vollständige/transfinite Induktion
  - ▶ Indirekte Beweise
- ▶ Betrachten diese Methoden kurz

## Vollständige Fallunterscheidung

- ▶ Bei endlich vielen Varianten kann jede einzeln untersucht werden
- ▶ Ist eine Aussage für jede Variante wahr, ist sie insgesamt wahr

### Beispiel 7.8

- ▶ **Behauptung:** Alle ungeraden Zahlen im Intervall  $[2^1, 2^3]$  sind Primzahlen.

$$\forall i = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, i \in [2^1, 2^3], \text{prim}(i)$$

- ▶ **Fälle:** Im Intervall sind nur die Zahlen 3, 5 und 7 ungerade
  - ▶ 3 ist prim
  - ▶ 5 ist prim
  - ▶ 7 ist prim
- ▶ **Folgerung:** Behauptung stimmt

## Vollständige/transfinite Induktion

- ▶ **Induktionsanker** (auch: **Induktionsanfang**, **IA**) → Zeigen, dass eine Aussage für einen speziellen (kleinsten) Fall (meist:  $n = 0$  oder  $n = 1$ ) gilt
- ▶ **Induktionsschritt** (**IS**)
  - ▶ **Induktionsvoraussetzung** (**IV**): Annahme, dass Aussage für ein  $n = k$  gilt
  - ▶ **Induktionsbehauptung** (**IB**): Behauptung, dass Aussage für  $n = k + 1$  gilt
  - ▶ Beweis, dass Induktionsbehauptung aus Induktionsvoraussetzung gilt
- ▶ **Induktionsschluss** → Folgerung, dass Aussage für alle (unendlich viele) Fälle ab dem ersten Fall gilt
- ▶ Detaillierter in LV „Mathematik I“

## Indirekter Beweis

- ▶ Annahme des **Gegenteils** der Behauptung
- ▶ Unter Nutzung lediglich der Annahme, von Axiomen und bewiesenen Aussagen einen **Widerspruch** finden
- ▶ Folgerung dass Annahme falsch und folglich Behauptung wahr ist

### Beispiel 7.10

- ▶ **Behauptung:** Es gibt keine größte Primzahl
- ▶ **Annahme A:** Es gibt eine größte Primzahl
- ▶ **Beweis:**
  - ▶ Aus  $A$  folgt, dass es nur endlich viele Primzahlen  $p_1, \dots, p_n$  gibt ( $B$ )
  - ▶ Bilden  $q = 1 + \prod_{i=1}^n p_i$
  - ▶ Fallunterscheidung:
    1.  $q$  ist prim →  $q$  ist größer als  $p_n$  → Widerspruch zu  $A$
    2.  $q$  hat Primteiler → diese sind nicht in  $p_1, \dots, p_n$  → Widerspruch zu  $B$  und damit zu  $A$
- ▶ **Schlussfolgerung:** Annahme  $A$  führt zum Widerspruch, folglich ist die Behauptung wahr

## Vollständige/transfinite Induktion (Forts.)

### Beispiel 7.9

- ▶ **Behauptung:**  $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$  → Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen ist  $n^2$
- ▶ **IA:**  $n = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 - 1 = 1 \rightarrow \text{w.A.}$
- ▶ **Induktionsschritt: IV:**  $\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$ , **IB:**  $\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = (k + 1)^2$
- ▶ **Beweis:**  $\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$
- ▶ **Induktionsschluss:** Behauptung gilt für alle  $n \geq 1$

## Beweis von Algorithmen

- ▶ Fragestellung ist ähnlich wie beim Entwurf
  - ▶ Was muss eigentlich gezeigt werden? → verlangt Klarheit über Spezifikation
  - ▶ Was ist bekannt?
- ▶ Was muss gezeigt werden:
  - Algorithmus sortiert für jede gültige Eingabe korrekt
- ▶ Auf welchen Annahmen kann aufgebaut werden?
  - Jeder Einzelschritt (Pseudocode oder Programmiersprache) wird gemäß seiner Spezifikation ausgeführt
  - ▶ Z.B. bewirkt  $x \leftarrow x + 1$ , dass Variable  $x$  um eins erhöht wird

## Definition

- Man unterscheidet zwei Arten von „Korrektheit“

### Definition 7.2 (Partielle Korrektheit)

Ein Algorithmus ist **partiell korrekt**, wenn er für eine spezifizierte erfüllte Vorbedingung ( $Q$ ) bei einer **eventuellen Terminierung** eine spezifizierte Nachbedingung ( $R$ ) erreicht; d.h. ( $R$ ) ist nach Ausführung erfüllt.

### Definition 7.3 (Totale Korrektheit)

Ein Algorithmus ist **total korrekt**, wenn er partiell korrekt ist und terminiert.

- Mit anderen Worten:
  - Ein partiell korrekter Algorithmus liefert das korrekte Ergebnis, falls er jemals fertig wird
  - Ein total korrekter Algorithmus liefert nach endlicher Zeit das korrekte Ergebnis

## Beispiel „Sortieren“ (Forts.)

- Der Bubblesort-Algorithmus (BSORT) sieht in Pseudocode z.B. so aus:

#### Algorithm BSORT

**Require:**  $e_1, \dots, e_n$

**Ensure:**  $\forall i \in \{1, n-1\}, e_i \leq e_{i+1}$

```

1: repeat
2:   changed ← false;
3:   for i ← 1, ..., n - 1 do
4:     if  $e_i > e_{i+1}$  then
5:       SWAP( $e_i, e_{i+1}$ )
6:       changed ← true
7:   end if
8: end for
9: until changed = false
    
```

- Die partielle Korrektheit ist leicht zu beweisen:
  - Wenn BSORT terminiert, muss  $changed = false$  gelten
  - $\rightsquigarrow$  für kein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  darf  $e_i > e_{i+1}$  gelten
  - $\rightsquigarrow \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, e_i \leq e_{i+1}$  □
- Totale Korrektheit heben wir uns für später auf 😊

## Beispiel „Sortieren“

- In Kapitel 1 wurde im Beispielalgorithmus 12 ein Sortieralgorithmus (Bubblesort) vorgestellt
- Die Korrektheit des Problems „Sortieren“ kann unabhängig vom Algorithmus ausgedrückt werden

### Problem Sortieren

**Eingabe:** Folge von Elementen  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  mit Ordnungsrelation ( $\leq$ )

**Ausgabe:** Permutation  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  von  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , so dass  $e'_1 \leq e'_2 \leq \dots \leq e'_n$

- Beispiel:** Sortieren einer Sequenz natürlicher Zahlen
  - Eingabe:** 8, 15, 3, 14, 7, 6, 18, 19
  - Ausgabe:** 3, 6, 7, 8, 14, 15, 18, 19

## Alternative Problemlösung: Insertion Sort

- Bubblesort ist nur eine mögliche Lösung für das Sortierproblem
- Betrachten Alternative: „Insertion Sort“ (INSSORT)

#### Algorithm INSSORT

**Require:**  $e_1, \dots, e_n$

**Ensure:**  $\forall i \in \{1, n-1\}, e_i \leq e_{i+1}$

```

1: for j ← 2, ..., n do
2:   key ←  $e_j$ 
3:   i ← j - 1
4:   while  $(i > 0) \wedge (e_i > key)$  do
5:      $e_{i+1} \leftarrow e_i$ 
6:     i ← i - 1
7:   end while
8:    $e_{i+1} \leftarrow key$ 
9: end for
    
```

- ▷ Verschiebe alle Elemente  $e_1, \dots, e_{j-1}$ , die größer als  $key$  sind, nach rechts
- ▷ Fülle die Lücke mit  $key$

## Alternative Problemlösung: Insertion Sort (Forts.)

### Algorithm INSSORT

**Require:**  $e_1, \dots, e_n$

**Ensure:**  $\forall i \in \{1, n-1\}, e_i \leq e_{i+1}$

```

1: for  $j \leftarrow 2, \dots, n$  do
2:    $key \leftarrow e_j$ 
3:    $i \leftarrow j - 1$ 
4:   while  $(i > 0) \wedge (e_i > key)$  do
5:      $e_{i+1} \leftarrow e_i$ 
6:      $i \leftarrow i - 1$ 
7:   end while
8:    $e_{i+1} \leftarrow key$ 
9: end for
    
```

8	15	3	14	7	6	18	19
---	----	---	----	---	---	----	----

## Alternative Problemlösung: Insertion Sort (Forts.)

### Algorithm INSSORT

**Require:**  $e_1, \dots, e_n$

**Ensure:**  $\forall i \in \{1, n-1\}, e_i \leq e_{i+1}$

```

1: for  $j \leftarrow 2, \dots, n$  do
2:    $key \leftarrow e_j$ 
3:    $i \leftarrow j - 1$ 
4:   while  $(i > 0) \wedge (e_i > key)$  do
5:      $e_{i+1} \leftarrow e_i$ 
6:      $i \leftarrow i - 1$ 
7:   end while
8:    $e_{i+1} \leftarrow key$ 
9: end for
    
```

### Lemma 7.1

Wenn die Schleife 4 – 7, terminiert, ist entweder (a)  $i = 0$  oder (b)  $e_i \leq key$

- **Beweis:**  $i$  startet mit einem Wert  $> 0$  und wird schrittweise verkleinert, Rest folgt direkt aus der Schleifenbedingung

## Alternative Problemlösung: Insertion Sort (Forts.)

- Intuitiv ist der Algorithmus „Insertion Sort“ vermutlich leicht zu verstehen
- Versuchen uns an einem Beweis der Korrektheit
- Benutzen dazu einige Lemmata

## Alternative Problemlösung: Insertion Sort (Forts.)

### Lemma 7.2

Wenn die Elemente  $e_1, \dots, e_{j-1}$  vor Eintritt in die Schleife 4 – 7 geordnet, so ist danach (a) die Sequenzen  $e_1, \dots, e_i$  und (b) die Sequenz  $e_{i+1}, \dots, e_j$  geordnet.

- **Beweis:**
  - (a) Die Sequenz  $e_1, \dots, e_i$  wird nicht geändert
  - (b) Fallunterscheidung:
    - Die Schleife wird nicht betreten  $\rightsquigarrow i = j - 1 \rightsquigarrow$  Sequenz  $e_{i+1}, \dots, e_j$  besteht aus einem Element  $e_j$ , ist also geordnet
    - Sonst: Entspricht der vorherigen Sequenz  $e_i, \dots, e_{j-1}$ , die ja geordnet war

### Merke:

Ordnung ist eine **Invariante** der Schleife!

## Alternative Problemlösung: Insertion Sort (Forts.)

### Lemma 7.3

Wenn vor dem Block 2 – 8 die Sequenz  $e_1, \dots, e_{j-1}$  sortiert war, ist anschließend die Sequenz  $e_1, \dots, e_j$  sortiert.

#### ► Beweis:

Fallunterscheidung,  $i$  nach Schleife:

- $i = 0$ : Laut Schleifenbedingung  $\forall k \in \{1, \dots, j-1\}, key < e_k$ ; außerdem laut Lemma 7.2 ist Sequenz  $e_1, \dots, e_j$  sortiert
- $i > 0, i < j - 2$ : Laut Lemma 7.1 ist  $key \geq e_i$ ; außerdem laut Schleifenbedingung  $\forall k \in \{i+2, j-1\}, key < e_k \rightsquigarrow e_1, \dots, e_i, e_{i+1} = key, \dots, e_j$  ist sortiert
- $i = j - 1$ : Schleife nicht durchlaufen  $\rightsquigarrow key \geq e_{i-1} \rightsquigarrow e_1, \dots, e_j$  ist sortiert

$key \geq e_i$  laut Lemma 7.1

## Korrektheitskalküle

- Beweise, wie der angeführte Bubblesort-Beweis, sind *ad hoc*
- Es gibt spezielle Kalküle (**Kalkül**  $\rightarrow$  formales System zum Ziehen logischer Schlüsse) für die Korrektheit von Programmen
- Beispiele
  - **Hoare-Kalkül** (auch: **Floyd-Hoare-Kalkül**)
  - **wp-Kalkül** (Edsger W.Dijkstra)
- Benutzung von Tripeln:  $\{ \text{Vorbedingung} \} \text{ Programmcode } \{ \text{Nachbedingung} \}$
- **Axiomatische Regeln**:  $\frac{\text{Prämisse}}{\text{Folgerung}}$
- Beispiel **Kompositionsregel**:  $\frac{\{Q\} P1 \{R\} \quad \{R\} P2 \{S\}}{\{Q\} P1; P2 \{S\}}$
- Mehr in LV „Verlässliche Systeme“

## Alternative Problemlösung: Insertion Sort (Forts.)

### Theorem 7.1

INSERTION SORT *sortiert eine Sequenz.*

#### ► Beweis: Induktion über $j$ :

- **IA**:  $j = 1$  Einersequenz ist immer sortiert
- **IS**: Wenn  $e_1, \dots, e_k$  sortiert ist, ist anschließend auch  $e_1, \dots, e_{k+1}$  sortiert laut Lemma 7.3
- **Schlussfolgerung**: Theorem gilt für alle endlichen Sequenzen

## Terminierung

- **Partielle** Korrektheit wird bewiesen unter der Bedingung, dass der Code Terminiert
- Für **totale** Korrektheit muss also noch **Terminierung** bewiesen werden

Kritisch bei

- **Rekursion**
  - Die Rekursion muss nach einer endlichen Anzahl abbrechen, d.h. die Rekursionsbasis erreichen.
- **Schleifen**
  - Die Schleifenbedingung muss nach einer endlichen Anzahl von Iterationen *false* werden.
  - Es muss sichergestellt sein, dass auch der Schleifenrumpf terminiert (in jeder Iteration)

## Terminierungsfunktion

- Zum Beweis der Terminierung einer Schleife muss eine **Terminierungsfunktion**  $\tau$  angegeben werden:

$$\tau : V \rightarrow \mathbb{N}$$

- $V$  ist eine Teilmenge der Ausdrücke über die Variablenwerte der Schleife
- Die Terminierungsfunktion muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - Ihre Werte sind natürliche Zahlen (einschließlich 0)
  - Jede Ausführung des Schleifenrumpfs **verringert** ihren Wert (streng monoton fallend)
  - Die Schleifenbedingung ist *false*, wenn  $\tau = 0$ .
- ➔  $\tau$  ist obere Schranke für die noch ausstehende Anzahl von Schleifendurchläufen.

## Beispiel: Quadratzahl

```

1 /* Calculates the square of a nonnegative integer number a */
2
3 /* [Q: 0 ≤ a] */
4 y = 0;
5 x = 0;
6 while (y != a) {
7     x = x+2*y+1;
8     y = y+1;
9 }
10 /* [R: x = a²] */
    
```

- Wähle als Terminierungsfunktion  $\tau = a - y$ :
  1.  $\tau$  wird in jedem Durchgang dekrementiert, da  $y$  inkrementiert wird und  $a$  konstant bleibt.
  2. Wenn  $\tau = 0$  folgt  $y = a$ , d.h. die Schleifenbedingung  $y \neq a$  ist falsch.
  3. Schleifenrumpf enthält keine Schleifen/Rekursionen/Gotos... Terminierung trivial
- ➔ Die Schleife terminiert

## Terminierungsregel

- Ist eine Terminierungsfunktion bekannt, kann die **Terminierungsregel** genutzt werden

$$\frac{\{\tau = k\} P \{\tau < k\} \quad \{\tau = 0\} \Rightarrow \neg B \quad P \text{ terminiert}}{\text{while}(B) P; \{\text{Terminierung}\}}$$

- Mit anderen Worten: **wenn** die Terminierungsfunktion streng monoton fallend ist, **und** (spätestens) ihr Wert 0 ein Ende der Schleife erzwingt, **und** der Schleifenkörper terminiert, **dann** terminiert eine Schleife

Es ist also zu zeigen:

1. **Streng monotonen Fallen von  $\tau$**
2. **Die Implikation der Nichterfüllung der Schleifenbedingung  $B$  bei niedrigsten  $\tau$**
3. **Die Terminierung des Rumpfs  $P$**

## Terminierung bei Rekursion

- Beim Beweis der Terminierung von Rekursionen kann genauso wie bei Schleifen vorgegangen werden
- Auch hier wird eine Terminierungsfunktion  $\tau$  konstruiert, die mit zunehmender Rekursionstiefe kleiner wird.
- Es muss gelten:
  1. Die Werte von  $\tau$  sind natürliche Zahlen (inkl. 0)
  2. Bei jedem Aufruf der Methode (rechte Seite der Rekursionsgleichung) wird der Wert von  $\tau$  echt kleiner.
  3. Abbruch bei (spätestens)  $\tau = 0$  erzwungen
- Beispiel: **Fibonacci-Zahlen**

```

1 /* Computes Fibonacci n-th number */
2 int fib(int n)
3 {
4     if (n < 3) return 1;
5     else return (fib(n-1)+fib(n-2));
6 }
    
```

- In diesem Fall können wir als Terminierungsfunktion  $\tau = n$  wählen.

## Probleme bei Terminierung

- ▶ Betrachten folgendes Beispiel:

**Algorithm** GOLDBACH

---

**Require:**  $x = 4$   
**Ensure:**  $x > 4$

1: **while**  $x = \text{Summe zweier Primzahlen}$  **do**  
 2:      $x \leftarrow x + 2$   
 3: **end while**

- ▶ Terminiert dieses Schleife?
- ▶ **Goldbachsche Vermutung:** Bis heute nicht allgemein bewiesen, aber bis  $10^{18}$  geprüft

**Achtung!** Beweise für Terminierung sind **nicht** immer möglich!

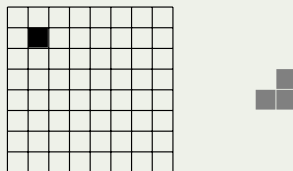
- ▶ Diese Aussage ist wiederum bewiesen (Terminierungsproblem)

## Aufgaben (Forts.)

### Aufgabe 7.2 (Trinomios)

Ein Quadrat setzt sich aus  $2^n \cdot 2^n - 1$  kleinen weißen Quadraten ( $n \in \mathbb{N}$ ) und einem schwarzen Quadrat zusammen (Beispiel mit  $n = 3$  siehe linke Abbildung). Ein Trinomio-Stein ist ein L-förmiger Stein, der drei kleine Quadrate abdeckt (siehe rechte Abbildung).

Beweisen Sie, dass die weißen Quadrate vollständig mit Trinomio-Steinen abgedeckt werden können, ohne dass sich Steine überlappen, Steine aus dem großen Quadrat ragen oder das schwarze Quadrat abgedeckt wird!



## Aufgaben

### Aufgabe 7.1

Betrachten Sie folgenden „Beweis“ und finden Sie den Fehler!

$$\begin{aligned}
 20 &= 20 && | \cdot -1 \\
 -20 &= -20 \\
 16 - 36 &= 25 - 45 \\
 4 \cdot 4 - 4 \cdot 9 &= 5 \cdot 5 - 5 \cdot 9 \\
 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} &= 5 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} && | x \stackrel{def}{=} \frac{9}{2} \\
 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot x &= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x && | + x^2 \\
 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + x^2 &= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + x^2 && | (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
 (4 - x)^2 &= (5 - x)^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\
 4 - x &= 5 - x && | + x \\
 4 &= 5 && \square
 \end{aligned}$$